Guia sobre EquaÃ§Ãµes de 2Âº Grau para Concursos

DescriÃ§Ã£o

O que Ã© uma EquaÃ§Ã£o de 2Âº Grau?

Uma equaÃ§Ã£o de 2Âº grau (ou equaÃ§Ã£o quadrÃ¡tica) Ã© uma igualdade matemÃ¡tica que contÃ©m uma incÃ³gnita elevada ao quadrado como seu maior grau. Sua forma geral Ã©:

axÂ² + bx + c = 0

Onde:

- **a** Ã© o coeficiente do termo quadrÃ¡tico (a â? 0)
- **b** Ã© o coeficiente do termo linear
- **c** Ã© o termo independente
- **x** Ã© a incÃ³gnita

ClassificaÃ§Ã£o das EquaÃ§Ãµes de 2Âº Grau

- **EquaÃ§Ã£o Completa**: Quando a, b e c sÃ£o diferentes de zero (axÂ² + bx + c = 0)
- **EquaÃ§Ã£o Incompleta**: Quando b = 0 (axÂ² + c = 0) ou c = 0 (axÂ² + bx = 0)

MÃ©todos de ResoluÃ§Ã£o

FÃ³rmula de Bhaskara

A soluÃ§Ã£o da equaÃ§Ã£o axÂ² + bx + c = 0 Ã© dada por:

x = (-b Â± â??Î?) / 2a

Onde:

- **Î? (delta)** = bÂ² â?? 4ac (discriminante)

Casos Particulares (EquaÃ§Ãµes Incompletas)

1. **Quando b = 0 (axÂ² + c = 0)**:
    - xÂ² = -c/a
    - x = Â±â??(-c/a)
    - HÃ¡ soluÃ§Ã£o real apenas se -c/a â?¥ 0
2. **Quando c = 0 (axÂ² + bx = 0)**:
    - x(ax + b) = 0

- ○ x = 0 ou x = -b/a

Completamento de Quadrados

MÃ©todo alternativo Ãºtil em questÃµes mais elaboradas:

1. Isolar o termo independente
2. Adicionar e subtrair (b/2a)Â² aos dois lados
3. Fatorar o trinÃ´mio perfeito
4. Isolar a variÃ¡vel

AnÃ¡lise do Discriminante (Î? = bÂ² â?? 4ac)

- **Î? > 0**: Duas raÃzes reais distintas
- **Î? = 0**: Uma raiz real (raiz dupla)
- **Î? < 0**: Duas raÃzes complexas conjugadas (sem soluÃ§Ã£o no conjunto dos nÃºmeros reais)

RelaÃ§Ãµes entre Coeficientes e RaÃzes

Se xâ?• e xâ?? sÃ£o as raÃzes da equaÃ§Ã£o axÂ² + bx + c = 0, entÃ£o:

- **Soma das raÃzes**: xâ?• + xâ?? = -b/a
- **Produto das raÃzes**: xâ?• Ã? xâ?? = c/a

Estas relaÃ§Ãµes sÃ£o conhecidas como **RelaÃ§Ãµes de Girard** e sÃ£o extremamente Ãºteis para resolver problemas avanÃ§ados sem precisar encontrar as raÃzes explicitamente.

Por que uma equaÃ§Ã£o de 2Âº grau tem duas raÃzes?

1. InterpretaÃ§Ã£o AlgÃ©brica

Uma equaÃ§Ã£o de 2Âº grau tem a forma:

axÂ² + bx + c = 0

Resolver essa equaÃ§Ã£o significa encontrar **todos os valores de x** que, ao substituir na equaÃ§Ã£o, fazem o resultado ser zero (ou seja, fazem a equaÃ§Ã£o ser verdadeira).

2. InterpretaÃ§Ã£o GeomÃ©trica

A equaÃ§Ã£o axÂ² + bx + c = 0 representa uma parÃ¡bola no plano cartesiano (grÃ¡fico). As **raÃzes** da equaÃ§Ã£o sÃ£o os pontos onde o grÃ¡fico dessa parÃ¡bola cruza o eixo x.

Como o grÃ¡fico de uma parÃ¡bola se comporta?

- Uma parÃ¡bola pode cortar o eixo x em **dois pontos** (duas raÃzes reais distintas)
- Tocar o eixo x em **um Ãºnico ponto** (raiz dupla ou â??duas raÃzes iguaisâ?•)
- Ou nem tocar o eixo x (raÃzes complexas, nÃ£o reais)

3. Por que aparecem ATÃ? duas raÃzes?

- A incÃ³gnita estÃ¡ elevada ao quadrado (â??grau 2â?•), entÃ£o o mÃ¡ximo nÃºmero de soluÃ§Ãµes possÃveis Ã© 2. Isso vem da â??Propriedade Fundamental da Ã•lgebraâ?•: uma equaÃ§Ã£o polinomial de grau n tem exatamente n raÃzes (contando raÃzes reais e, se necessÃ¡rio, raÃzes complexas/mÃºltiplas).
- Ã?s vezes, as duas raÃzes sÃ£o iguais (Î? = 0), Ã s vezes sÃ£o nÃºmeros reais diferentes (Î? > 0), e Ã s vezes sÃ£o nÃºmeros complexos (Î? < 0). Sempre **existem duas soluÃ§Ãµes** (mesmo que iguais ou complexas).

O que isso significa na prÃ¡tica?

- Se vocÃª jogar uma bola pra cima (movimento parabÃ³lico), a equaÃ§Ã£o do movimento Ã© de 2Âº grau: um dos valores da raiz te diz quando a bola Ã© lanÃ§ada (t=0), o outro quando ela volta ao chÃ£o. **Dois momentos diferentes, duas soluÃ§Ãµes reais.**
- Ao calcular trajetÃ³rias, posicionamentos, Ã¡reas com determinada restriÃ§Ã£o, etc., os dois resultados podem representar situaÃ§Ãµes diferentes, alternativas, ou atÃ© condiÃ§Ãµes a descartar conforme o problema.

Qual Ã© a importÃ¢ncia de saber isso?

1. **InterpretaÃ§Ã£o de problemas:**
    - Nem sempre as duas soluÃ§Ãµes fazem sentido prÃ¡tico (ex: tempo negativo). Mas vocÃª deve **sempre** calcular ambas e analisar qual faz sentido para o problema.
2. **AvaliaÃ§Ã£o de alternativas em concursos:**
    - Muitas vezes, as questÃµes pedem para escolher ao analisar as raÃzes: uma responde ao problema pratico, outra nÃ£o.
3. **VisÃ£o ampla dos fenÃ´menos:**
    - A ideia de â??duas possibilidadesâ?• aparece em problemas diversos (fÃsica, quÃmica, economia, engenharia), facilitando a compreensÃ£o e soluÃ§Ã£o rÃ¡pida.

Uma equaÃ§Ã£o de 2Âº grau tem duas raÃzes porque o termo xÂ² permite, geralmente, dois valores de x que produzem o mesmo resultado (zero). Cada raiz pode representar uma situaÃ§Ã£o diferente no contexto do problema.

Exemplos BÃ¡sicos

Exemplo 1: Resolvendo uma equaÃ§Ã£o completa

Resolver: 2xÂ² â?? 5x + 3 = 0

ResoluÃ§Ã£o:

- a = 2, b = -5, c = 3
- Î? = (-5)Â² â?? 4Ã?2Ã?3 = 25 â?? 24 = 1
- x = (5 Â± â??1)/4 = (5 Â± 1)/4
- xâ?• = 6/4 = 3/2 = 1,5
- xâ?? = 4/4 = 1

VerificaÃ§Ã£o:

- 2(1,5)Â² â?? 5(1,5) + 3 = 2(2,25) â?? 7,5 + 3 = 4,5 â?? 7,5 + 3 = 0 â??
- 2(1)Â² â?? 5(1) + 3 = 2 â?? 5 + 3 = 0 â??

Exemplo 2: EquaÃ§Ã£o incompleta (b = 0)

Resolver: 3xÂ² â?? 12 = 0

ResoluÃ§Ã£o:

- 3xÂ² = 12
- xÂ² = 4
- x = Â±2

Resposta: x = 2 ou x = -2

Exemplo 3: EquaÃ§Ã£o incompleta (c = 0)

Resolver: 2xÂ² â?? 8x = 0

ResoluÃ§Ã£o:

- 2x(x â?? 4) = 0
- x = 0 ou x = 4

Problemas

Exemplo 4: Problema de idade

Problema: A idade atual de Pedro, elevada ao quadrado, menos o quÃ¡druplo de sua idade, Ã© igual a 45. Qual Ã© a idade de Pedro?

ResoluÃ§Ã£o:

1. Traduzindo para equaÃ§Ã£o:
   - xÂ² â?? 4x = 45

- xÂ² â?? 4x â?? 45 = 0

2. Aplicando a fÃ³rmula de Bhaskara:
    - a = 1, b = -4, c = -45
    - Î? = (-4)Â² â?? 4Ã?1Ã?(-45) = 16 + 180 = 196
    - x = (4 Â± â??196)/2 = (4 Â± 14)/2
    - xâ?• = 18/2 = 9
    - xâ?? = -10/2 = -5
3. Como idade nÃ£o pode ser negativa, a resposta Ã© 9 anos.

Exemplo 5: Problema geomÃ©trico

Problema: Um retÃ¢ngulo tem perÃmetro de 30 cm e Ã¡rea de 56 cmÂ². Quais sÃ£o suas dimensÃµes?

ResoluÃ§Ã£o:

1. Definindo as variÃ¡veis:
    - x = comprimento
    - y = largura

2. Montando o sistema:
    - 2x + 2y = 30 (perÃmetro)
    - xy = 56 (Ã¡rea)
3. Da primeira equaÃ§Ã£o:
    - 2x + 2y = 30
    - x + y = 15
    - y = 15 â?? x
4. Substituindo na segunda equaÃ§Ã£o:
    - x(15 â?? x) = 56
    - 15x â?? xÂ² = 56
    - -xÂ² + 15x â?? 56 = 0
    - xÂ² â?? 15x + 56 = 0
5. Resolvendo a equaÃ§Ã£o de 2Âº grau:
    - a = 1, b = -15, c = 56
    - Î? = (-15)Â² â?? 4Ã?1Ã?56 = 225 â?? 224 = 1
    - x = (15 Â± â??1)/2 = (15 Â± 1)/2
    - xâ?• = 16/2 = 8
    - xâ?? = 14/2 = 7
6. Calculando as larguras correspondentes:
    - Se x = 8, entÃ£o y = 15 â?? 8 = 7
    - Se x = 7, entÃ£o y = 15 â?? 7 = 8
7. Resposta: As dimensÃµes sÃ£o 8 cm por 7 cm.

Problemas AvanÃ§ados para Concursos

Exemplo 6: Problema de OtimizaÃ§Ã£o (ESAF)

Problema: Deseja-se construir uma caixa sem tampa, de base quadrada, com capacidade de 32 dmÂ³, utilizando o mÃnimo possÃvel de material. Qual deve ser o lado da base em dm?

ResoluÃ§Ã£o:

1. Definindo as variÃ¡veis:
    - x = lado da base (quadrada)
    - h = altura da caixa
2. Volume da caixa:
    - V = xÂ² Ã? h = 32
    - h = 32/xÂ²
3. Ã•rea do material utilizado (sem tampa):
    - A = xÂ² + 4xh (base + 4 laterais)
    - A = xÂ² + 4x(32/xÂ²)
    - A = xÂ² + 128/x
4. Para minimizar a Ã¡rea, derivamos e igualamos a zero:
    - dA/dx = 2x â?? 128/xÂ² = 0
    - 2xÂ³ = 128
    - xÂ³ = 64
    - x = 4
5. Resposta: O lado da base deve ser 4 dm.

Exemplo 7: EquaÃ§Ã£o com Valor Absoluto (FCC)

Problema: Resolva a equaÃ§Ã£o |xÂ² â?? 4x| + xÂ² â?? 4x = 0.

ResoluÃ§Ã£o:

1. Analisando casos:**Caso 1:** Se xÂ² â?? 4x â?¥ 0
    - |xÂ² â?? 4x| = xÂ² â?? 4x
    - (xÂ² â?? 4x) + (xÂ² â?? 4x) = 0
    - 2xÂ² â?? 8x = 0
    - 2x(x â?? 4) = 0
    - x = 0 ou x = 4
    - Verificando: quando x = 0 ou x = 4, temos xÂ² â?? 4x = 0, que satisfaz a condiÃ§Ã£o xÂ² â?? 4x â?¥ 0

   Caso 2: Se xÂ² â?? 4x < 0
    - |xÂ² â?? 4x| = -(xÂ² â?? 4x) = 4x â?? xÂ²
    - (4x â?? xÂ²) + (xÂ² â?? 4x) = 0
    - 0 = 0
    - Neste caso, qualquer valor de x que satisfaÃ§a 0 < x < 4 Ã© soluÃ§Ã£o
2. Resposta: As soluÃ§Ãµes sÃ£o x = 0, x = 4 e qualquer valor de x no intervalo (0, 4).

Exemplo 8: RaÃzes com CondiÃ§Ãµes Especiais (CESPE/CEBRASPE)

Problema: Sejam r e s as raÃzes da equaÃ§Ã£o xÂ² â?? 3x + k = 0. Determine o valor de k para que rÂ² + sÂ² = 13.

ResoluÃ§Ã£o:

1. Usando as relaÃ§Ãµes de Girard:
    - r + s = 3 (soma das raÃzes)
    - r Ã? s = k (produto das raÃzes)
2. Sabemos que:
    - (r + s)Â² = rÂ² + 2rs + sÂ²
    - rÂ² + sÂ² = (r + s)Â² â?? 2rs
3. Substituindo:
    - rÂ² + sÂ² = 3Â² â?? 2k = 9 â?? 2k
4. Como rÂ² + sÂ² = 13:
    - 9 â?? 2k = 13
    - -2k = 4
    - k = -2
5. Resposta: k = -2

AplicaÃ§Ãµes Especiais

EquaÃ§Ãµes Biquadradas

SÃ£o equaÃ§Ãµes na forma axâ•´ + bxÂ² + c = 0. Resolvemos fazendo a substituiÃ§Ã£o y = xÂ².

Exemplo: Resolva xâ•´ â?? 5xÂ² + 4 = 0

ResoluÃ§Ã£o:

1. Fazendo y = xÂ²:
    - yÂ² â?? 5y + 4 = 0
2. Resolvendo a equaÃ§Ã£o de 2Âº grau:
    - (y â?? 4)(y â?? 1) = 0
    - y = 4 ou y = 1
3. Voltando para x:
    - xÂ² = 4 â?¹ x = Â±2
    - xÂ² = 1 â?¹ x = Â±1
4. Resposta: x = -2, x = -1, x = 1 ou x = 2

EquaÃ§Ãµes Irracionais

SÃ£o equaÃ§Ãµes que contÃªm a incÃ³gnita dentro de uma raiz e que, apÃ³s manipulaÃ§Ã£o, podem resultar em equaÃ§Ãµes de 2Âº grau.

Exemplo: Resolva â??(x + 3) â?? x = 0

ResoluÃ§Ã£o:

1. Isolando o radical:
    - â??(x + 3) = x

2. Elevando ambos os lados ao quadrado:
   - x + 3 = xÂ²
   - 0 = xÂ² â?? x â?? 3
   - 0 = (x â?? 3)(x + 1)
   - x = 3 ou x = -1
3. VerificaÃ§Ã£o (essencial neste tipo de equaÃ§Ã£o):
   - Para x = 3: â??(3 + 3) â?? 3 = â??6 â?? 3 â?? 2,45 â?? 3 = -0,55 â? 0
   - Para x = -1: â??(-1 + 3) â?? (-1) = â??2 + 1 â?? 1,41 + 1 = 2,41 â? 0
4. Neste caso, nenhum valor Ã© raiz da equaÃ§Ã£o original.

TÃ©cnicas AvanÃ§adas

MÃ¡ximos e MÃnimos da FunÃ§Ã£o QuadrÃ¡tica

Para uma funÃ§Ã£o f(x) = axÂ² + bx + c (a â? 0):

- O vÃ©rtice da parÃ¡bola estÃ¡ no ponto x = -b/2a
- O valor de y no vÃ©rtice Ã© f(-b/2a) = c â?? bÂ²/4a
- Se a > 0, o vÃ©rtice Ã© um ponto de mÃnimo
- Se a < 0, o vÃ©rtice Ã© um ponto de mÃ¡ximo

Problema de AplicaÃ§Ã£o com MÃ¡ximos e MÃnimos (VUNESP)

Problema: Um fazendeiro possui 200 metros de cerca e deseja construir um curral retangular aproveitando um muro reto existente como um dos lados do retÃ¢ngulo. Qual deve ser a Ã¡rea mÃ¡xima possÃvel para o curral?

ResoluÃ§Ã£o:

1. Definindo as variÃ¡veis:
   - x = largura do curral
   - y = comprimento do curral
2. Como um lado aproveita o muro, usamos cerca apenas em 3 lados:
   - x + y + x = 200
   - 2x + y = 200
   - y = 200 â?? 2x
3. Ã•rea do curral:
   - A = x Ã? y = x(200 â?? 2x) = 200x â?? 2xÂ²
4. Para maximizar a Ã¡rea, o vÃ©rtice da parÃ¡bola (ponto de mÃ¡ximo) ocorre em:
   - x = -b/2a = -200/(-4) = 50
5. Quando x = 50, temos:
   - y = 200 â?? 2(50) = 100
   - A = 50 Ã? 100 = 5.000 mÂ²
6. Resposta: A Ã¡rea mÃ¡xima do curral Ã© 5.000 mÂ².

QuestÃµes de Concursos com EstratÃ©gias

Exemplo 9: QuestÃ£o com ParÃ¢metros (ENEM)

Problema: Determine os valores de m para que a equaÃ§Ã£o xÂ² + mx + 1 = 0 tenha duas raÃzes reais.

ResoluÃ§Ã£o:

1. Para ter duas raÃzes reais, o discriminante deve ser positivo:
    - Î? = mÂ² â?? 4(1)(1) = mÂ² â?? 4 > 0
    - mÂ² > 4
    - m < -2 ou m > 2
2. Resposta: m < -2 ou m > 2

Exemplo 10: QuestÃ£o de Soma Especial (FGV)

Problema: A soma dos quadrados das raÃzes da equaÃ§Ã£o 3xÂ² â?? kx + 27 = 0 Ã© igual a 30. Qual o valor de k?

ResoluÃ§Ã£o:

1. Usando as relaÃ§Ãµes de Girard:
    - Seja r e s as raÃzes da equaÃ§Ã£o
    - r + s = k/3 (soma das raÃzes)
    - r Ã? s = 27/3 = 9 (produto das raÃzes)
2. Sabemos que:
    - rÂ² + sÂ² = (r + s)Â² â?? 2(r Ã? s)
    - rÂ² + sÂ² = (k/3)Â² â?? 2(9)
    - rÂ² + sÂ² = kÂ²/9 â?? 18
3. Como rÂ² + sÂ² = 30:
    - kÂ²/9 â?? 18 = 30
    - kÂ²/9 = 48
    - kÂ² = 432
    - k = Â±12â??3
4. Verificando qual valor Ã© coerente com o problema.
5. Resposta: k = 12â??3 (considerando as condiÃ§Ãµes adicionais do problema)

Dicas para Concursos PÃºblicos

1. **Memorize as fÃ³rmulas principais**:
    - FÃ³rmula de Bhaskara
    - RelaÃ§Ãµes entre coeficientes e raÃzes
    - FÃ³rmula do vÃ©rtice da parÃ¡bola
2. **ReconheÃ§a padrÃµes de equaÃ§Ãµes**:
    - EquaÃ§Ãµes incompletas tÃªm mÃ©todos de resoluÃ§Ã£o mais simples
    - EquaÃ§Ãµes na forma xÂ² = n tÃªm raÃzes x = Â±â??n
3. **Verifique sempre suas soluÃ§Ãµes**:
    - Especialmente em equaÃ§Ãµes irracionais

    - Nem sempre todas as soluÃ§Ãµes algÃ©bricas sÃ£o soluÃ§Ãµes da equaÃ§Ã£o original
4. **Aplique o discriminante estrategicamente**:
    - Muitas questÃµes pedem apenas a natureza das raÃzes, nÃ£o seus valores exatos
5. **Domine as relaÃ§Ãµes de Girard**:
    - Problemas que envolvem soma, produto, soma dos quadrados ou produto dos cubos das raÃzes sÃ£o resolvidos rapidamente
6. **InterpretaÃ§Ã£o geomÃ©trica**:
    - Lembre-se que a equaÃ§Ã£o axÂ² + bx + c = 0 representa os pontos onde a parÃ¡bola y = axÂ² + bx + c cruza o eixo x
7. **Problemas prÃ¡ticos**:
    - Para problemas de Ã¡rea e perÃmetro, procure expressar tudo em funÃ§Ã£o de uma Ãºnica variÃ¡vel
    - Em problemas de otimizaÃ§Ã£o, identifique a funÃ§Ã£o a ser maximizada ou minimizada

Data de criaÃ§Ã£o
05/11/2025
Autor
admin