

## Guia sobre Equações de 2º Grau para Concursos

### Descrição

#### O que é uma Equação de 2º Grau?

Uma equação de 2º grau (ou equação quadrática) é uma igualdade matemática que contém uma incógnita elevada ao quadrado como seu maior grau. Sua forma geral é:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Onde:

- **a** é o coeficiente do termo quadrático ( $a \neq 0$ )
- **b** é o coeficiente do termo linear
- **c** é o termo independente
- **x** é a incógnita

#### Classificação das Equações de 2º Grau

- **Equação Completa:** Quando a, b e c são diferentes de zero ( $ax^2 + bx + c = 0$ )
- **Equação Incompleta:** Quando  $b = 0$  ( $ax^2 + c = 0$ ) ou  $c = 0$  ( $ax^2 + bx = 0$ )

### Métodos de Resolução

#### Fórmula de Bhaskara

A solução da equação  $ax^2 + bx + c = 0$  é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Onde:

- $\Delta$  (delta) =  $b^2 - 4ac$  (discriminante)

#### Casos Particulares (Equações Incompletas)

1. Quando  $b = 0$  ( $ax^2 + c = 0$ ):
  - $x^2 = -c/a$
  - $x = \pm \sqrt{-c/a}$
  - Não há solução real apenas se  $-c/a \neq 0$
2. Quando  $c = 0$  ( $ax^2 + bx = 0$ ):
  - $x(ax + b) = 0$

- o  $x = 0$  ou  $x = -b/a$

## Completamento de Quadrados

Muito alternativo e útil em questões mais elaboradas:

1. Isolar o termo independente
2. Adicionar e subtrair  $(b/2a)^2$  aos dois lados
3. Fatorar o trinômio perfeito
4. Isolar a variável

## Análise do Discriminante ( $\Delta = b^2 - 4ac$ )

- $\Delta > 0$ : Duas raízes reais distintas
- $\Delta = 0$ : Uma raiz real (raiz dupla)
- $\Delta < 0$ : Duas raízes complexas conjugadas (sem solução no conjunto dos números reais)

## Relações entre Coeficientes e Raízes

Se  $x_1$  e  $x_2$  são as raízes da equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , então:

- **Soma das raízes:**  $x_1 + x_2 = -b/a$
- **Produto das raízes:**  $x_1 \cdot x_2 = c/a$

Estas relações são conhecidas como **Relações de Girard** e são extremamente úteis para resolver problemas avançados sem precisar encontrar as raízes explicitamente.

## Por que uma equação de 2º grau tem duas raízes?

### 1. Interpretação Algébrica

Uma equação de 2º grau tem a forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Resolver essa equação significa encontrar **todos os valores de x** que, ao substituir na equação, fazem o resultado ser zero (ou seja, fazem a equação ser verdadeira).

### 2. Interpretação Geométrica

A equação  $ax^2 + bx + c = 0$  representa uma parábola no plano cartesiano (gráfico). As **raízes** da equação são os pontos onde o gráfico dessa parábola cruza o eixo x.

**Como o gráfico de uma parábola se comporta?**

- Uma parábola pode cortar o eixo x em **dois pontos** (duas raízes reais distintas)
- Tocar o eixo x em **um único ponto** (raiz dupla ou duas raízes iguais)
- Ou nem tocar o eixo x (raízes complexas, não reais)

### 3. Por que aparecem ATÉ duas raízes?

- A incógnita está elevada ao quadrado (grau 2), então o máximo número de soluções possíveis é 2. Isso vem da Propriedade Fundamental da Álgebra: uma equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes (contando raízes reais e, se necessário, raízes complexas/múltiplas).
- Às vezes, as duas raízes são iguais ( $\Delta = 0$ ), às vezes são números reais diferentes ( $\Delta > 0$ ), e às vezes são números complexos ( $\Delta < 0$ ). Sempre **existem duas soluções** (mesmo que iguais ou complexas).

### O que isso significa na prática?

- Se você jogar uma bola pra cima (movimento parabólico), a equação do movimento de 2º grau: um dos valores da raiz te diz quando a bola é lançada ( $t=0$ ), o outro quando ela volta ao chão. **Dois momentos diferentes, duas soluções reais.**
- Ao calcular trajetórias, posicionamentos, áreas com determinada restrição, etc., os dois resultados podem representar situações diferentes, alternativas, ou até condições a descartar conforme o problema.

### Qual é a importância de saber isso?

1. **Interpretação de problemas:**
  - Nem sempre as duas soluções fazem sentido prático (ex: tempo negativo). Mas você deve **sempre** calcular ambas e analisar qual faz sentido para o problema.
2. **Avaliação de alternativas em concursos:**
  - Muitas vezes, as questões pedem para escolher ao analisar as raízes: uma responde ao problema prático, outra não.
3. **Visão ampla dos fenômenos:**
  - A ideia de duas possibilidades aparece em problemas diversos (física, química, economia, engenharia), facilitando a compreensão e solução rápida.

Uma equação de 2º grau tem duas raízes porque o termo  $x^2$  permite, geralmente, dois valores de x que produzem o mesmo resultado (zero). Cada raiz pode representar uma situação diferente no contexto do problema.

## Exemplos Básicos

### Exemplo 1: Resolvendo uma equação completa

Resolver:  $2x^2 - 5x + 3 = 0$

**Resolução:**

- $a = 2, b = -5, c = 3$
- $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 - 24 = 1$
- $x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$
- $x_1 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} = 1,5$
- $x_2 = \frac{4}{4} = 1$

**Verificação:**

- $2(1,5)^2 - 5(1,5) + 3 = 2(2,25) - 7,5 + 3 = 4,5 - 7,5 + 3 = 0$
- $2(1)^2 - 5(1) + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$

**Exemplo 2: Equação incompleta (b = 0)**

Resolver:  $3x^2 - 12 = 0$

**Resolução:**

- $3x^2 = 12$
- $x^2 = 4$
- $x = \pm 2$

**Resposta:**  $x = 2$  ou  $x = -2$

**Exemplo 3: Equação incompleta (c = 0)**

Resolver:  $2x^2 - 8x = 0$

**Resolução:**

- $2x(x - 4) = 0$
- $x = 0$  ou  $x = 4$

## Problemas

**Exemplo 4: Problema de idade**

**Problema:** A idade atual de Pedro, elevada ao quadrado, menos o quadruplo de sua idade, é igual a 45. Qual é a idade de Pedro?

**Resolução:**

1. Traduzindo para equação:
  - $x^2 - 4x = 45$

- $x^2 - 4x - 45 = 0$
- 2. Aplicando a fórmula de Bhaskara:
  - $a = 1, b = -4, c = -45$
  - $\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-45) = 16 + 180 = 196$
  - $x = (4 \pm \sqrt{196})/2 = (4 \pm 14)/2$
  - $x_1 = 18/2 = 9$
  - $x_2 = -10/2 = -5$
- 3. Como idade não pode ser negativa, a resposta é 9 anos.

### Exemplo 5: Problema geométrico

**Problema:** Um retângulo tem perímetro de 30 cm e área de 56 cm<sup>2</sup>. Quais são suas dimensões?

**Resolução:**

1. Definindo as variáveis:
  - $x$  = comprimento
  - $y$  = largura
2. Montando o sistema:
  - $2x + 2y = 30$  (perímetro)
  - $xy = 56$  (área)
3. Da primeira equação:
  - $2x + 2y = 30$
  - $x + y = 15$
  - $y = 15 - x$
4. Substituindo na segunda equação:
  - $x(15 - x) = 56$
  - $15x - x^2 = 56$
  - $-x^2 + 15x - 56 = 0$
  - $x^2 - 15x + 56 = 0$
5. Resolvendo a equação de 2º grau:
  - $a = 1, b = -15, c = 56$
  - $\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 56 = 225 - 224 = 1$
  - $x = (15 \pm \sqrt{1})/2 = (15 \pm 1)/2$
  - $x_1 = 16/2 = 8$
  - $x_2 = 14/2 = 7$
6. Calculando as larguras correspondentes:
  - Se  $x = 8$ , então  $y = 15 - 8 = 7$
  - Se  $x = 7$ , então  $y = 15 - 7 = 8$
7. Resposta: As dimensões são 8 cm por 7 cm.

## Problemas Avançados para Concursos

### Exemplo 6: Problema de Otimização (ESAF)

**Problema:** Deseja-se construir uma caixa sem tampa, de base quadrada, com capacidade de  $32 \text{ dm}^3$ , utilizando o m ximo poss vel de material. Qual deve ser o lado da base em dm?

**Resolu o:**

- Definindo as vari veis:
  - $x$  = lado da base (quadrada)
  - $h$  = altura da caixa
- Volume da caixa:
  - $V = x^2 \cdot h = 32$
  - $h = 32/x^2$
-  rea do material utilizado (sem tampa):
  - $A = x^2 + 4xh$  (base + 4 laterais)
  - $A = x^2 + 4x(32/x^2)$
  - $A = x^2 + 128/x$
- Para minimizar a  rea, derivamos e igualamos a zero:
  - $dA/dx = 2x - 128/x^2 = 0$
  - $2x^3 = 128$
  - $x^3 = 64$
  - $x = 4$
- Resposta: O lado da base deve ser 4 dm.

### Exemplo 7: Equa o com Valor Absoluto (FCC)

**Problema:** Resolva a equa o  $|x^2 - 4x| + x^2 - 4x = 0$ .

**Resolu o:**

- Analisando casos:
 

**Caso 1:** Se  $x^2 - 4x \geq 0$

  - $|x^2 - 4x| = x^2 - 4x$
  - $(x^2 - 4x) + (x^2 - 4x) = 0$
  - $2x^2 - 8x = 0$
  - $2x(x - 4) = 0$
  - $x = 0$  ou  $x = 4$
  - Verificando: quando  $x = 0$  ou  $x = 4$ , temos  $x^2 - 4x = 0$ , que satisfaz a condi o  $x^2 - 4x \geq 0$

**Caso 2:** Se  $x^2 - 4x < 0$

  - $|x^2 - 4x| = -(x^2 - 4x) = 4x - x^2$
  - $(4x - x^2) + (x^2 - 4x) = 0$
  - $0 = 0$
  - Neste caso, qualquer valor de  $x$  que satisfa a  $0 < x < 4$    solu o
- Resposta: As solu es s o  $x = 0$ ,  $x = 4$  e qualquer valor de  $x$  no intervalo  $(0, 4)$ .

### Exemplo 8: Ra es com Condi es Especiais (CESPE/CEBRASPE)

**Problema:** Sejam  $r$  e  $s$  as ra es da equa o  $x^2 - 3x + k = 0$ . Determine o valor de  $k$  para que  $r^2 + s^2 = 13$ .

## Resolução:

- Usando as relações de Girard:
  - $r + s = 3$  (soma das raízes)
  - $r \cdot s = k$  (produto das raízes)
- Sabemos que:
  - $(r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$
  - $r^2 + s^2 = (r + s)^2 - 2rs$
- Substituindo:
  - $r^2 + s^2 = 3^2 - 2k = 9 - 2k$
- Como  $r^2 + s^2 = 13$ :
  - $9 - 2k = 13$
  - $-2k = 4$
  - $k = -2$
- Resposta:  $k = -2$

## Aplicações Especiais

### Equações Biquadradas

São equações na forma  $ax^4 + bx^2 + c = 0$ . Resolvemos fazendo a substituição  $y = x^2$ .

**Exemplo:** Resolva  $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

### Resolução:

- Fazendo  $y = x^2$ :
  - $y^2 - 5y + 4 = 0$
- Resolvendo a equação de 2º grau:
  - $(y - 4)(y - 1) = 0$
  - $y = 4$  ou  $y = 1$
- Voltando para  $x$ :
  - $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$
  - $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$
- Resposta:  $x = -2, x = -1, x = 1$  ou  $x = 2$

### Equações Irracionais

São equações que contêm a incógnita dentro de uma raiz e que, após manipulação, podem resultar em equações de 2º grau.

**Exemplo:** Resolva  $\sqrt{x + 3} = x$

### Resolução:

- Isolando o radical:
  - $\sqrt{x + 3} = x$

2. Elevando ambos os lados ao quadrado:
  - $x + 3 = x^2$
  - $0 = x^2 - x - 3$
  - $0 = (x - 3)(x + 1)$
  - $x = 3$  ou  $x = -1$
3. Verificação (essencial neste tipo de equação):
  - Para  $x = 3$ :  $3 + 3 = 3^2$   $6 = 9$   $2,45 = 3 = -0,55 \neq 0$
  - Para  $x = -1$ :  $-1 + 3 = (-1)^2$   $2 = 1$   $1,41 + 1 = 2,41 \neq 0$
4. Neste caso, nenhum valor é raiz da equação original.

## Técnicas Avançadas

### Máximos e Mínimos da Função Quadrática

Para uma função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ):

- O vértice da parábola está no ponto  $x = -b/2a$
- O valor de  $y$  no vértice é  $f(-b/2a) = c - b^2/4a$
- Se  $a > 0$ , o vértice é um ponto de mínimo
- Se  $a < 0$ , o vértice é um ponto de máximo

### Problema de Aplicação com Máximos e Mínimos (VUNESP)

**Problema:** Um fazendeiro possui 200 metros de cerca e deseja construir um curral retangular aproveitando um muro reto existente como um dos lados do retângulo. Qual deve ser a área máxima possível para o curral?

#### Resolução:

1. Definindo as variáveis:
  - $x$  = largura do curral
  - $y$  = comprimento do curral
2. Como um lado aproveita o muro, usamos cerca apenas em 3 lados:
  - $x + y + x = 200$
  - $2x + y = 200$
  - $y = 200 - 2x$
3. Área do curral:
  - $A = x \cdot y = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$
4. Para maximizar a área, o vértice da parábola (ponto de máximo) ocorre em:
  - $x = -b/2a = -200/(-4) = 50$
5. Quando  $x = 50$ , temos:
  - $y = 200 - 2(50) = 100$
  - $A = 50 \cdot 100 = 5.000 \text{ m}^2$
6. Resposta: A área máxima do curral é  $5.000 \text{ m}^2$ .

## Questões de Concursos com Estratégias

## Exemplo 9: Questão com Parâmetros (ENEM)

**Problema:** Determine os valores de  $m$  para que a equação  $x^2 + mx + 1 = 0$  tenha duas raízes reais.

**Resolução:**

- Para ter duas raízes reais, o discriminante deve ser positivo:
  - $\Delta = m^2 - 4(1)(1) = m^2 - 4 > 0$
  - $m^2 > 4$
  - $m < -2$  ou  $m > 2$
- Resposta:  $m < -2$  ou  $m > 2$

## Exemplo 10: Questão de Soma Especial (FGV)

**Problema:** A soma dos quadrados das raízes da equação  $3x^2 - kx + 27 = 0$  é igual a 30. Qual o valor de  $k$ ?

**Resolução:**

- Usando as relações de Girard:
  - Seja  $r$  e  $s$  as raízes da equação
  - $r + s = k/3$  (soma das raízes)
  - $r \cdot s = 27/3 = 9$  (produto das raízes)
- Sabemos que:
  - $r^2 + s^2 = (r + s)^2 - 2(r \cdot s)$
  - $r^2 + s^2 = (k/3)^2 - 2(9)$
  - $r^2 + s^2 = k^2/9 - 18$
- Como  $r^2 + s^2 = 30$ :
  - $k^2/9 - 18 = 30$
  - $k^2/9 = 48$
  - $k^2 = 432$
  - $k = \pm 12\sqrt{3}$
- Verificando qual valor é coerente com o problema.
- Resposta:  $k = 12\sqrt{3}$  (considerando as condições adicionais do problema)

## Dicas para Concursos Públicos

- Memorize as fórmulas principais:**
  - Fórmula de Bhaskara
  - Relações entre coeficientes e raízes
  - Fórmula do vértice da parábola
- Reconheça padrões de equações:**
  - Equações incompletas têm métodos de resolução mais simples
  - Equações na forma  $x^2 = n$  têm raízes  $x = \pm\sqrt{n}$
- Verifique sempre suas soluções:**
  - Especialmente em equações irracionais

- Nem sempre todas as soluções algébricas são soluções da equação original
- 4. **Aplice o discriminante estrategicamente:**
  - Muitas questões pedem apenas a natureza das raízes, não seus valores exatos
- 5. **Domine as relações de Girard:**
  - Problemas que envolvem soma, produto, soma dos quadrados ou produto dos cubos das raízes são resolvidos rapidamente
- 6. **Interpretação geométrica:**
  - Lembre-se que a equação  $ax^2 + bx + c = 0$  representa os pontos onde a parábola  $y = ax^2 + bx + c$  cruza o eixo  $x$
- 7. **Problemas práticos:**
  - Para problemas de área e perímetro, procure expressar tudo em função de uma única variável
  - Em problemas de otimização, identifique a função a ser maximizada ou minimizada

**Data de criação**

05/11/2025

**Autor**

admin

Colega de Classe