

Variações de Grandezas: Razão, Proporção e Regra de Três

Descrição

A variação de grandezas é um dos tópicos mais recorrentes em provas de concursos públicos, aparecendo em questões de raciocínio lógico, matemática e até em situações práticas de concursos administrativos. Dominar razão, proporção e regra de três é fundamental para resolver problemas do dia a dia e garantir pontos preciosos em sua prova.

Neste artigo, você encontrará uma explicação completa, desde os conceitos básicos até questões avançadas no estilo dos principais concursos do Brasil.

1. RAZÃO E PROPORÇÃO

1.1 O que é Razão?

Razão é a comparação entre duas grandezas através de uma divisão. É expressa na forma de fração ou divisão.

Fórmula:

Onde:

- a = antecedente
- b = consequente (sempre diferente de zero)

Exemplos Práticos:

Exemplo 1: Em uma sala há 20 homens e 30 mulheres. Qual a razão entre homens e mulheres?

$$\text{Razão} = \frac{a}{b} \text{ ou } a:b$$

Interpretação: Para cada 2 homens, há 3 mulheres.

Exemplo 2: Um carro percorre 150 km em 2 horas. Qual a razão entre distância e tempo (velocidade média)?

$$\text{Velocidade} = \frac{150 \text{ km}}{2 \text{ h}} = 75 \text{ km/h}$$

1.2 Tipos Especiais de Razão

a) Escala

Razão entre a medida no desenho e a medida real.

Exemplo: Uma planta baixa está na escala 1:100. Isso significa que 1 cm no desenho corresponde a 100 cm (1 metro) na realidade.

b) Velocidade Média

Razão entre distância percorrida e tempo gasto.

$$v_m = \frac{S}{t}$$

c) Densidade Demográfica

Razão entre população e área territorial.

$$d = \frac{\text{população}}{\text{área}}$$

1.3 O que é Proporção?

Proporção é a igualdade entre duas razões.

$$\text{Fórmula: } ab=cd \text{ ou } a:b=c:d$$

Lê-se: a está para b, assim como c está para d.

Propriedade Fundamental das Proporções

$$a \cdot d = b \cdot c$$

Os **extremos** (a e d) multiplicados são iguais aos **meios** (b e c) multiplicados.

Exemplo:

Verificar se os números 2, 3, 4 e 6 formam uma proporção:

$$2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$$

Verificando: $2 \times 6 = 12$ e $3 \times 4 = 12$

A proporção é verdadeira!

1.4 Propriedades das Proporções

Propriedade 1: Troca dos Meios

$$ab=cd \Leftrightarrow ac=bd \quad ab=cd \Leftrightarrow ac=bd$$

Propriedade 2: Troca dos Extremos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$$

Propriedade 3: Soma dos Antecedentes e Consequentes

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

1.5 Divisão em Partes Proporcionais

Divisão Diretamente Proporcional

Exemplo Prático: Dividir R\$ 600,00 entre três pessoas (A, B e C) de forma diretamente proporcional a 2, 3 e 5.

Resolução:

$$\text{Soma dos valores: } 2 + 3 + 5 = 10$$

Constante de proporcionalidade:

$$k = \frac{600}{10} = 60$$

Cálculo das partes:

A recebe:

$$2 \times 60 = 120$$

B recebe:

$$3 \times 60 = 180$$

C recebe: $5 \times 60 = 300$ reais

Verificação:

$$120 + 180 + 300 = 600$$

Divisão Inversamente Proporcional

Exemplo Prático: Dividir R\$ 1.200,00 entre três funcionários inversamente proporcional ao número de faltas: 2, 3 e 4 faltas.

Resolução:

Inverter os números:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$$

$$\text{MMC}(2, 3, 4) = 12$$

Transformar em proporção direta: 6, 4, 3 (dividindo 12 por cada número)

$$\text{Soma: } 6 + 4 + 3 = 13$$

Constante:

$$k = \frac{1200}{13} \approx 92,31$$

Cálculo:

1º funcionário:

$$6 \times 92,31 = 553,84$$

2º funcionário:

$$4 \times 92,31 = 369,24$$

3º funcionário:

$$3 \times 92,31 = 276,92$$

2. REGRA DE TRÊS SIMPLES

2.1 Conceito

A **regra de três simples** é um método matemático usado para resolver problemas que envolvem duas grandezas diretamente ou inversamente proporcionais.

2.2 Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando:

- Aumentando uma, a outra aumenta na mesma proporção
- Diminuindo uma, a outra diminui na mesma proporção

Exemplo: Velocidade e distância (com tempo constante)

2.3 Grandezas Inversamente Proporcionais

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando:

- Aumentando uma, a outra diminui na mesma proporção
- Diminuindo uma, a outra aumenta na mesma proporção

Exemplo: Número de operários e tempo de trabalho

2.4 Como Resolver Regra de Três Simples

Passo a Passo:

1. **Identificar as grandezas** envolvidas
2. **Montar a tabela** com as grandezas
3. **Analisar a relação** (direta ou inversa)
4. **Montar a proporção**
5. **Resolver a equação**

2.5 Exemplos Resolvidos

Exemplo 1: Regra de Três Simples Direta

Problema: Se 5 cadernos custam R\$ 30,00, quanto custarão 8 cadernos?

Resolução:

Cadernos Preço (R\$)

5	30
8	x

Análise: Mais cadernos → mais caro (DIRETA)

Proporção: $\frac{5}{8} = \frac{30}{x}$

Resolução: $5 \cdot x = 8 \cdot 30$ $5x = 240$ $x = \frac{240}{5} = 48$

Resposta: 8 cadernos custarão R\$ 48,00.

Exemplo 2: Regra de Três Simples Inversa

Problema: 10 operários constroem um muro em 6 dias. Em quantos dias 15 operários construirão o mesmo muro?

Resolução:

Operários Dias

10	6
15	x

Análise: Mais operários $\hat{=}$ menos dias (INVERSA)

Proporção (invertamos um lado): $1015 = x61015 = x6$

Resolução: $15x = 10 \cdot 615x = 10 \cdot 6$ $15x = 6015x = 60$ $x = 6015 = 4x = 6015 = 4$

Resposta: 15 operários construirão em 4 dias.

3. REGRA DE TRÊS COMPOSTA

3.1 Conceito

A **regra de três composta** é utilizada quando o problema envolve **três ou mais grandezas**, sendo necessário analisar a relação entre cada uma delas com a grandeza desconhecida.

3.2 Como Resolver Regra de Três Composta

Passo a Passo:

1. **Identificar todas as grandezas**
2. **Montar a tabela completa**
3. **Isolar a grandeza com a incógnita**
4. **Comparar cada grandeza com a incógnita** (direta ou inversa)
5. **Montar a proporção** (inverter as grandezas inversas)
6. **Resolver a equação**

3.3 Exemplos Resolvidos

Exemplo 1: Regra de Três Composta

Problema: 12 operários trabalhando 8 horas por dia constroem 60 metros de muro em 5 dias. Quantos metros de muro serão construídos por 18 operários trabalhando 6 horas por dia durante 10 dias?

Resolução:

Operários Horas/dia Dias Metros

12	8	5	60
18	6	10	x

Análise de cada grandeza em relação a METROS:

1. **Operários x Metros:** DIRETA (mais operários $\hat{=}$ mais metros)

2. **Horas/dia x Metros:** DIRETA (mais horas $\hat{=}$ mais metros)
3. **Dias x Metros:** DIRETA (mais dias $\hat{=}$ mais metros)

Montando a proporção: $\frac{60}{x} = \frac{12}{18} \times \frac{8}{6} \times \frac{5}{10}$

Simplificando: $\frac{60}{x} = \frac{12 \times 8 \times 5}{18 \times 6 \times 10}$

$\frac{60}{x} = \frac{480}{1080}$

$\frac{60}{x} = \frac{4}{9}$

Resolvendo: $4x = 60 \times 9$ $4x = 540$ $x = 135$

Resposta: Serão construídos 135 metros de muro.

Exemplo 2: Regra de Três Composta com Grandeza Inversa

Problema: 8 máquinas, trabalhando 6 horas por dia, produzem 2.400 peças em 5 dias. Quantas máquinas serão necessárias para produzir 3.000 peças em 4 dias, trabalhando 5 horas por dia?

Resolução:

Máquinas	Horas/dia	Dias	Peças
8	6	5	2400
x	5	4	3000

Análise de cada grandeza em relação a MÁQUINAS:

1. **Horas/dia x Máquinas:** INVERSA (mais horas $\hat{=}$ menos máquinas)
2. **Dias x Máquinas:** INVERSA (mais dias $\hat{=}$ menos máquinas)
3. **Peças x Máquinas:** DIRETA (mais peças $\hat{=}$ mais máquinas)

Montando a proporção (invertendo as inversas): $\frac{8}{x} = \frac{5}{6} \times \frac{4}{5} \times \frac{2400}{3000}$

Simplificando: $\frac{8}{x} = \frac{5 \times 4 \times 2400}{6 \times 5 \times 3000}$

$\frac{8}{x} = \frac{48000}{90000} = \frac{8}{15}$

Resolvendo: $8 \times 15 = 8x$ $120 = 8x$ $x = 15$

QUESTÕES ESTILO CONCURSO PÚBLICO RESOLVIDAS

QUESTÃO 1 $\hat{=}$ Nível: Médio (Estilo CESPE)

Enunciado: Uma equipe de 15 servidores públicos foi designada para analisar 450 processos administrativos. Após 6 dias de trabalho, 180 processos já haviam sido analisados. Mantendo o mesmo ritmo de trabalho, em quantos dias, no total, todos os processos estarão analisados?

Resolução Passo a Passo:

Passo 1: Identificar as grandezas

- Processos analisados
- Dias de trabalho

Passo 2: Organizar os dados

Processos Dias

180	6
450	x

Passo 3: Analisar a relação Mais processos → mais dias (DIRETA)

Passo 4: Montar a proporção $\frac{180}{450} = \frac{6}{x}$

Passo 5: Resolver $180 \cdot x = 450 \cdot 6$ $180x = 2700$ $x = \frac{2700}{180} = 15$

Resposta: Os 450 processos estarão analisados em 15 dias no total.

QUESTÃO 2 → Nível: Médio (Estilo FCC)

Enunciado: Um terreno de formato retangular tem 15 metros de largura por 25 metros de comprimento. Em uma planta baixa, esse terreno foi representado com 5 cm de largura. O comprimento do terreno na planta, em centímetros, é:

a) 6,25 b) 7,50 c) 8,33 d) 10,00 e) 12,50

Resolução Passo a Passo:

Passo 1: Converter para a mesma unidade

- Largura real: 15 m = 1.500 cm
- Comprimento real: 25 m = 2.500 cm
- Largura na planta: 5 cm

Passo 2: Encontrar a escala usando a largura $\frac{\text{Escala}}{\text{medida na planta}} = \frac{\text{medida real}}{1500} = \frac{5}{1500} = \frac{1}{300}$

Passo 3: Aplicar a mesma escala ao comprimento $\frac{x}{2500} = \frac{1}{300}$

Passo 4: Resolver $300x = 2500$ $x = \frac{2500}{300} = 8,33 \text{ cm}$

Resposta: Alternativa C $\hat{=}$ 8,33 cm

QUESTÃO 3 $\hat{=}$ Nível: Difícil (Estilo FGV)

Enunciado: Uma gráfica possui 4 impressoras que, trabalhando 6 horas por dia, imprimem 9.600 folhetos em 8 dias. Para imprimir 18.000 folhetos em 6 dias, trabalhando 8 horas por dia, quantas impressoras serão necessárias?

Resolução Passo a Passo:

Passo 1: Organizar em tabela

Impressoras	Horas/dia	Dias	Folhetos
4	6	8	9600
x	8	6	18000

Passo 2: Analisar cada grandeza em relação a IMPRESSORAS

- Horas/dia x Impressoras:** INVERSA (mais horas $\hat{=}$ menos impressoras)
- Dias x Impressoras:** INVERSA (mais dias $\hat{=}$ menos impressoras)
- Folhetos x Impressoras:** DIRETA (mais folhetos $\hat{=}$ mais impressoras)

Passo 3: Montar a proporção (invertendo as inversas) $\frac{4}{x} = \frac{8}{6} \times \frac{6}{8} \times \frac{9600}{18000}$

Passo 4: Simplificar $\frac{4}{x} = \frac{8 \times 6 \times 9600}{6 \times 8 \times 18000}$

$$\frac{4}{x} = \frac{460800}{864000}$$

$$\frac{4}{x} = \frac{9600}{18000} = \frac{8}{15}$$

Passo 5: Resolver $4 \times 15 = 8x$ $60 = 8x$ $x = 7,5$

Passo 6: Interpretar Como não é possível ter 7,5 impressoras, serão necessárias **8 impressoras**.

Resposta: 8 impressoras

QUESTÃO 4 $\hat{=}$ Nível: Médio (Estilo VUNESP)

Enunciado: Três servidores (Ana, Bruno e Carlos) devem dividir uma gratificação de R\$ 4.800,00 de forma proporcional ao tempo de serviço de cada um: Ana tem 5 anos, Bruno tem 7 anos e Carlos tem 12 anos. Quanto cada um receberá?

Resolução Passo a Passo:

Passo 1: Identificar os valores proporcionais

- Ana: 5
- Bruno: 7
- Carlos: 12

Passo 2: Somar os valores $5 + 7 + 12 = 24$

Passo 3: Calcular a constante de proporcionalidade $k = \frac{4800}{24} = 200$

Passo 4: Calcular cada parte

- Ana: $5 \times 200 = 1.000$ reais
- Bruno: $7 \times 200 = 1.400$ reais
- Carlos: $12 \times 200 = 2.400$ reais

Passo 5: Verificar $1000 + 1400 + 2400 = 4800$???

Resposta:

- Ana: R\$ 1.000,00
- Bruno: R\$ 1.400,00
- Carlos: R\$ 2.400,00

Colega de Classe

QUESTÃO 5 ??? Nível: Difícil (Estilo CESPE ??? Certo ou Errado)

Enunciado: Uma equipe de 20 digitadores, trabalhando 5 horas por dia, digitou 300 páginas em 12 dias. Se uma equipe de 15 digitadores trabalhasse 6 horas por dia durante 20 dias, digitaria mais de 450 páginas.

Resolução Passo a Passo:

Passo 1: Organizar os dados

Digitadores Horas/dia Dias Páginas

20	5	12	300
15	6	20	x

Passo 2: Analisar as relações com PÁGINAS

- Digitadores x Páginas: DIRETA
- Horas/dia x Páginas: DIRETA
- Dias x Páginas: DIRETA

Passo 3: Montar a proporção $\frac{300}{x} = \frac{20}{15} \times \frac{5}{6} \times \frac{12}{20}$

Passo 4: Calcular $\frac{300}{x} = \frac{20 \times 5 \times 12}{15 \times 6 \times 20}$

$$\frac{300}{x} = \frac{1200}{1800} = \frac{2}{3}$$

Passo 5: Resolver $2x = 300 \times 3$ $2x = 900$ $x = 450$

Passo 6: Analisar a afirmação A questão diz "mais de 40 páginas", mas o resultado é exatamente 40 páginas.

Resposta: ERRADO

QUESTÃO 6 - Nível: Médio (Estilo FCC)

Enunciado: Uma torneira enche um tanque em 6 horas. Outra torneira enche o mesmo tanque em 3 horas. Se as duas torneiras forem abertas simultaneamente, em quanto tempo encherá o tanque?

Resolução Passo a Passo:

Passo 1: Calcular o rendimento de cada torneira

Torneira A: $\frac{1}{6}$ do tanque por hora

Torneira B: $\frac{1}{3}$ do tanque por hora

Passo 2: Somar os rendimentos $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Interpretação: Juntas, enchem 1/2 do tanque por hora

Passo 3: Calcular o tempo Se em 1 hora enchem 1/2, então: $\text{Tempo} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ horas

Resposta: 2 horas

DICAS PARA CONCURSOS

5 Dicas de Ouro

- Sempre identifique a relação:** Pergunte-se: "Se aumentar uma grandeza, a outra aumenta ou diminui?"
- Organize os dados em tabela:** Visualizar ajuda a não errar
- Atenção às unidades:** Converta tudo para a mesma unidade antes de calcular
- Simplifique antes de resolver:** Facilita os cálculos e economiza tempo

