Guia sobre Equações de 2º Grau para Concursos

Descrição

O que é uma Equação de 2º Grau?

Uma equação de 2º grau (ou equação quadrática) é uma igualdade matemática que contém uma incógnita elevada ao quadrado como seu maior grau. Sua forma geral é:

$ax^2 + bx + c = 0$

Onde:

- **a** é o coeficiente do termo quadrático (a ? 0)
- **b** é o coeficiente do termo linear
- **c** é o termo independente
- **x** é a incógnita

Classificação das Equações de 2º Grau

- **Equação Completa**: Quando a, b e c são diferentes de zero ($ax^2 + bx + c = 0$)
- **Equação Incompleta**: Quando b = 0 ($ax^2 + c = 0$) ou c = 0 ($ax^2 + bx = 0$)

Métodos de Resolução

Fórmula de Bhaskara

A solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$ é dada por:

x = (-b ± ??) / 2a

Onde:

- **? (delta)** = $b^2 - 4ac$ (discriminante)

Casos Particulares (Equações Incompletas)

1. **Quando b = 0 ($ax^2 + c = 0$)**:
   - $x^2 = -c/a$
   - x = ±?(-c/a)
   - Há solução real apenas se -c/a ? 0
2. **Quando c = 0 ($ax^2 + bx = 0$)**:
   - $x(ax + b) = 0$

- $x = 0$ ou $x = -b/a$

Completamento de Quadrados

Método alternativo útil em questões mais elaboradas:

1. Isolar o termo independente
2. Adicionar e subtrair $(b/2a)^2$ aos dois lados
3. Fatorar o trinômio perfeito
4. Isolar a variável

Análise do Discriminante (? = b² – 4ac)

- **? > 0**: Duas raízes reais distintas
- **? = 0**: Uma raiz real (raiz dupla)
- **? < 0**: Duas raízes complexas conjugadas (sem solução no conjunto dos números reais)

Relações entre Coeficientes e Raízes

Se x? e x? são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, então:

- **Soma das raízes**: x? + x? = -b/a
- **Produto das raízes**: x? × x? = c/a

Estas relações são conhecidas como **Relações de Girard** e são extremamente úteis para resolver problemas avançados sem precisar encontrar as raízes explicitamente.

Por que uma equação de 2º grau tem duas raízes?

1. Interpretação Algébrica

Uma equação de 2º grau tem a forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Resolver essa equação significa encontrar **todos os valores de x** que, ao substituir na equação, fazem o resultado ser zero (ou seja, fazem a equação ser verdadeira).

2. Interpretação Geométrica

A equação $ax^2 + bx + c = 0$ representa uma parábola no plano cartesiano (gráfico). As **raízes** da equação são os pontos onde o gráfico dessa parábola cruza o eixo x.

Como o gráfico de uma parábola se comporta?

- Uma parábola pode cortar o eixo x em **dois pontos** (duas raízes reais distintas)
- Tocar o eixo x em **um único ponto** (raiz dupla ou "duas raízes iguais")
- Ou nem tocar o eixo x (raízes complexas, não reais)

3. Por que aparecem ATÉ duas raízes?

- A incógnita está elevada ao quadrado ("grau 2"), então o máximo número de soluções possíveis é 2. Isso vem da "Propriedade Fundamental da Álgebra": uma equação polinomial de grau n tem exatamente n raízes (contando raízes reais e, se necessário, raízes complexas/múltiplas).
- Às vezes, as duas raízes são iguais (? = 0), às vezes são números reais diferentes (? > 0), e às vezes são números complexos (? < 0). Sempre **existem duas soluções** (mesmo que iguais ou complexas).

O que isso significa na prática?

- Se você jogar uma bola pra cima (movimento parabólico), a equação do movimento é de 2º grau: um dos valores da raiz te diz quando a bola é lançada (t=0), o outro quando ela volta ao chão. **Dois momentos diferentes, duas soluções reais.**
- Ao calcular trajetórias, posicionamentos, áreas com determinada restrição, etc., os dois resultados podem representar situações diferentes, alternativas, ou até condições a descartar conforme o problema.

Qual é a importância de saber isso?

1. **Interpretação de problemas:**
   - Nem sempre as duas soluções fazem sentido prático (ex: tempo negativo). Mas você deve **sempre** calcular ambas e analisar qual faz sentido para o problema.
2. **Avaliação de alternativas em concursos:**
   - Muitas vezes, as questões pedem para escolher ao analisar as raízes: uma responde ao problema pratico, outra não.
3. **Visão ampla dos fenômenos:**
   - A ideia de "duas possibilidades" aparece em problemas diversos (física, química, economia, engenharia), facilitando a compreensão e solução rápida.

Uma equação de 2º grau tem duas raízes porque o termo x² permite, geralmente, dois valores de x que produzem o mesmo resultado (zero). Cada raiz pode representar uma situação diferente no contexto do problema.

Exemplos Básicos

Exemplo 1: Resolvendo uma equação completa

Resolver: $2x^2 - 5x + 3 = 0$

Resolução:

- a = 2, b = -5, c = 3
- ? = $(-5)^2 - 4\times2\times3 = 25 - 24 = 1$
- x = (5 ± ?1)/4 = (5 ± 1)/4
- x? = 6/4 = 3/2 = 1,5
- x? = 4/4 = 1

Verificação:

- $2(1{,}5)^2 - 5(1{,}5) + 3 = 2(2{,}25) - 7{,}5 + 3 = 4{,}5 - 7{,}5 + 3 = 0$?
- $2(1)^2 - 5(1) + 3 = 2 - 5 + 3 = 0$?

Exemplo 2: Equação incompleta (b = 0)

Resolver: $3x^2 - 12 = 0$

Resolução:

- $3x^2 = 12$
- $x^2 = 4$
- $x = \pm2$

Resposta: x = 2 ou x = -2

Exemplo 3: Equação incompleta (c = 0)

Resolver: $2x^2 - 8x = 0$

Resolução:

- $2x(x - 4) = 0$
- x = 0 ou x = 4

Problemas

Exemplo 4: Problema de idade

Problema: A idade atual de Pedro, elevada ao quadrado, menos o quádruplo de sua idade, é igual a 45. Qual é a idade de Pedro?

Resolução:

1. Traduzindo para equação:
   - $x^2 - 4x = 45$

- $x^2 - 4x - 45 = 0$

2. Aplicando a fórmula de Bhaskara:
   - a = 1, b = -4, c = -45
   - ? = $(-4)^2 - 4\times1\times(-45) = 16 + 180 = 196$
   - x = (4 ± ?196)/2 = (4 ± 14)/2
   - x? = 18/2 = 9
   - x? = -10/2 = -5
3. Como idade não pode ser negativa, a resposta é 9 anos.

Exemplo 5: Problema geométrico

Problema: Um retângulo tem perímetro de 30 cm e área de 56 cm^2. Quais são suas dimensões?

Resolução:

1. Definindo as variáveis:
   - x = comprimento
   - y = largura
2. Montando o sistema:
   - 2x + 2y = 30 (perímetro)
   - xy = 56 (área)
3. Da primeira equação:
   - 2x + 2y = 30
   - x + y = 15
   - y = 15 – x
4. Substituindo na segunda equação:
   - x(15 – x) = 56
   - $15x - x^2 = 56$
   - $-x^2 + 15x - 56 = 0$
   - $x^2 - 15x + 56 = 0$
5. Resolvendo a equação de 2º grau:
   - a = 1, b = -15, c = 56
   - ? = $(-15)^2 - 4\times1\times56 = 225 - 224 = 1$
   - x = (15 ± ?1)/2 = (15 ± 1)/2
   - x? = 16/2 = 8
   - x? = 14/2 = 7
6. Calculando as larguras correspondentes:
   - Se x = 8, então y = 15 – 8 = 7
   - Se x = 7, então y = 15 – 7 = 8
7. Resposta: As dimensões são 8 cm por 7 cm.

Problemas Avançados para Concursos

Exemplo 6: Problema de Otimização (ESAF)

Problema: Deseja-se construir uma caixa sem tampa, de base quadrada, com capacidade de 32 dm^3, utilizando o mínimo possível de material. Qual deve ser o lado da base em dm?

Resolução:

1. Definindo as variáveis:
   - x = lado da base (quadrada)
   - h = altura da caixa
2. Volume da caixa:
   - $V = x^2 \times h = 32$
   - $h = 32/x^2$
3. Área do material utilizado (sem tampa):
   - $A = x^2 + 4xh$ (base + 4 laterais)
   - $A = x^2 + 4x(32/x^2)$
   - $A = x^2 + 128/x$
4. Para minimizar a área, derivamos e igualamos a zero:
   - $dA/dx = 2x – 128/x^2 = 0$
   - $2x^3 = 128$
   - $x^3 = 64$
   - $x = 4$
5. Resposta: O lado da base deve ser 4 dm.

Exemplo 7: Equação com Valor Absoluto (FCC)

Problema: Resolva a equação $|x^2 – 4x| + x^2 – 4x = 0$.

Resolução:

1. Analisando casos:**Caso 1:** Se $x^2 – 4x$? 0
   - $|x^2 – 4x| = x^2 – 4x$
   - $(x^2 – 4x) + (x^2 – 4x) = 0$
   - $2x^2 – 8x = 0$
   - $2x(x – 4) = 0$
   - $x = 0$ ou $x = 4$
   - Verificando: quando $x = 0$ ou $x = 4$, temos $x^2 – 4x = 0$, que satisfaz a condição $x^2 – 4x$? 0

   Caso 2: Se $x^2 – 4x < 0$
   - $|x^2 – 4x| = -(x^2 – 4x) = 4x – x^2$
   - $(4x – x^2) + (x^2 – 4x) = 0$
   - $0 = 0$
   - Neste caso, qualquer valor de x que satisfaça $0 < x < 4$ é solução
2. Resposta: As soluções são $x = 0$, $x = 4$ e qualquer valor de x no intervalo $(0, 4)$.

Exemplo 8: Raízes com Condições Especiais (CESPE/CEBRASPE)

Problema: Sejam r e s as raízes da equação $x^2 – 3x + k = 0$. Determine o valor de k para que $r^2 + s^2 = 13$.

Resolução:

1. Usando as relações de Girard:
    - $r + s = 3$ (soma das raízes)
    - $r \times s = k$ (produto das raízes)
2. Sabemos que:
    - $(r + s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$
    - $r^2 + s^2 = (r + s)^2 – 2rs$
3. Substituindo:
    - $r^2 + s^2 = 3^2 – 2k = 9 – 2k$
4. Como $r^2 + s^2 = 13$:
    - $9 – 2k = 13$
    - $-2k = 4$
    - $k = -2$
5. Resposta: $k = -2$

Aplicações Especiais

Equações Biquadradas

São equações na forma ax? + $bx^2 + c = 0$. Resolvemos fazendo a substituição $y = x^2$.

Exemplo: Resolva x? – $5x^2 + 4 = 0$

Resolução:

1. Fazendo $y = x^2$:
    - $y^2 – 5y + 4 = 0$
2. Resolvendo a equação de 2º grau:
    - $(y – 4)(y – 1) = 0$
    - $y = 4$ ou $y = 1$
3. Voltando para x:
    - $x^2 = 4$? $x = \pm 2$
    - $x^2 = 1$? $x = \pm 1$
4. Resposta: $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$ ou $x = 2$

Equações Irracionais

São equações que contêm a incógnita dentro de uma raiz e que, após manipulação, podem resultar em equações de 2º grau.

Exemplo: Resolva ?(x + 3) – x = 0

Resolução:

1. Isolando o radical:
    - ?(x + 3) = x
2.

Elevando ambos os lados ao quadrado:
- $x + 3 = x^2$
- $0 = x^2 – x – 3$
- $0 = (x – 3)(x + 1)$
- $x = 3$ ou $x = -1$

3. Verificação (essencial neste tipo de equação):
    - Para x = 3: ?(3 + 3) – 3 = ?6 – 3 ? 2,45 – 3 = -0,55 ? 0
    - Para x = -1: ?(-1 + 3) – (-1) = ?2 + 1 ? 1,41 + 1 = 2,41 ? 0
4. Neste caso, nenhum valor é raiz da equação original.

Técnicas Avançadas

Máximos e Mínimos da Função Quadrática

Para uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$ (a ? 0):

- O vértice da parábola está no ponto $x = -b/2a$
- O valor de y no vértice é $f(-b/2a) = c – b^2/4a$
- Se $a > 0$, o vértice é um ponto de mínimo
- Se $a < 0$, o vértice é um ponto de máximo

Problema de Aplicação com Máximos e Mínimos (VUNESP)

Problema: Um fazendeiro possui 200 metros de cerca e deseja construir um curral retangular aproveitando um muro reto existente como um dos lados do retângulo. Qual deve ser a área máxima possível para o curral?

Resolução:

1. Definindo as variáveis:
    - x = largura do curral
    - y = comprimento do curral
2. Como um lado aproveita o muro, usamos cerca apenas em 3 lados:
    - $x + y + x = 200$
    - $2x + y = 200$
    - $y = 200 – 2x$
3. Área do curral:
    - $A = x \times y = x(200 – 2x) = 200x – 2x^2$
4. Para maximizar a área, o vértice da parábola (ponto de máximo) ocorre em:
    - $x = -b/2a = -200/(-4) = 50$
5. Quando x = 50, temos:
    - $y = 200 – 2(50) = 100$
    - $A = 50 \times 100 = 5.000\ m^2$
6. Resposta: A área máxima do curral é 5.000 m².

Questões de Concursos com Estratégias

Exemplo 9: Questão com Parâmetros (ENEM)

Problema: Determine os valores de m para que a equação $x^2 + mx + 1 = 0$ tenha duas raízes reais.

Resolução:

1. Para ter duas raízes reais, o discriminante deve ser positivo:
   - $? = m^2 – 4(1)(1) = m^2 – 4 > 0$
   - $m^2 > 4$
   - $m < -2$ ou $m > 2$
2. Resposta: $m < -2$ ou $m > 2$

Exemplo 10: Questão de Soma Especial (FGV)

Problema: A soma dos quadrados das raízes da equação $3x^2 – kx + 27 = 0$ é igual a 30. Qual o valor de k?

Resolução:

1. Usando as relações de Girard:
   - Seja r e s as raízes da equação
   - $r + s = k/3$ (soma das raízes)
   - $r \times s = 27/3 = 9$ (produto das raízes)
2. Sabemos que:
   - $r^2 + s^2 = (r + s)^2 – 2(r \times s)$
   - $r^2 + s^2 = (k/3)^2 – 2(9)$
   - $r^2 + s^2 = k^2/9 – 18$
3. Como $r^2 + s^2 = 30$:
   - $k^2/9 – 18 = 30$
   - $k^2/9 = 48$
   - $k^2 = 432$
   - $k = \pm12?3$
4. Verificando qual valor é coerente com o problema.
5. Resposta: $k = 12?3$ (considerando as condições adicionais do problema)

Dicas para Concursos Públicos

1. **Memorize as fórmulas principais**:
   - Fórmula de Bhaskara
   - Relações entre coeficientes e raízes
   - Fórmula do vértice da parábola
2. **Reconheça padrões de equações**:
   - Equações incompletas têm métodos de resolução mais simples
   - Equações na forma $x^2 = n$ têm raízes $x = \pm?n$
3. **Verifique sempre suas soluções**:
   - Especialmente em equações irracionais

    - Nem sempre todas as soluções algébricas são soluções da equação original
4. **Aplique o discriminante estrategicamente**:
    - Muitas questões pedem apenas a natureza das raízes, não seus valores exatos
5. **Domine as relações de Girard**:
    - Problemas que envolvem soma, produto, soma dos quadrados ou produto dos cubos das raízes são resolvidos rapidamente
6. **Interpretação geométrica**:
    - Lembre-se que a equação $ax^2 + bx + c = 0$ representa os pontos onde a parábola $y = ax^2 + bx + c$ cruza o eixo x
7. **Problemas práticos**:
    - Para problemas de área e perímetro, procure expressar tudo em função de uma única variável
    - Em problemas de otimização, identifique a função a ser maximizada ou minimizada

Data de criação
05/11/2025
Autor
admin